ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

Fondée en 1949 — Reconnue par l'État
Diplôme visé par le Ministère des Universités
I, Rue Bougainville — 75007 PARIS
551 32-59 ● 705 98-21

CONCOURS D'ADMISSION
SESSION DE MAI 1979

MATHEMATIQUES 1ère EPREUVE

DURÉE 4 H - COEFFICIENT 4

Problème I

1°) Soit f une fonction à valeurs réelles, définie, continue, deux fois dérivable sur le segment $[a,b]$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit x_0 un élément de l'intervalle $]a,b[$; montrer qu'il existe un nombre réel $\alpha \in]a,b[$ tel que :

$$f(x_0) = \frac{f''(\alpha)}{2} (x_0 - a)(x_0 - b).$$

(On pourra étudier la fonction $x \mapsto f_1(x) = f(x) - \left(\frac{A}{2}\right)(x - a)(x - b)$ où

$$A = \frac{2 f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)} \quad).$$

2°) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$ telle qu'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout élément x de $[a,b]$ on ait :

$$m \leqslant g''(x) \leqslant M$$

Démontrer que l'on a pour tout élément x de $[a,b]$

$$M \frac{(x - a)(x - b)}{2} \leqslant g(x) - g(a) \frac{x - b}{a - b} - g(b) \frac{x - a}{b - a} \leqslant m \frac{(x - a)(x - b)}{2}$$

En déduire les relations

$$-M \frac{(b - a)^3}{12} \leqslant \int_a^b g(x) \, dx - \frac{b - a}{2} \left[g(a) + g(b) \right] \leqslant - m \frac{(b - a)^3}{12}. \quad (1)$$

3°) En appliquant la double inégalité (1) à la fonction Log sur l'intervalle $[n, n + 1]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), démontrer la relation

$$\frac{1}{12 (n + 1)^2} \leqslant \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[\text{Log } (n + 1) - \text{Log } n \right] - 1 \leqslant \frac{1}{12 n^2}$$

4 °) On pose pour tout entier n non nul,

$$U_n = \text{Log} \left(n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \right) - \text{Log } (n!)$$

et pour tout entier $n \geqslant 2$

$$V_n = U_n + \frac{1}{12 (n - 1)}$$

Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

En déduire que la suite (V_n) converge vers une limite C et que l'on a pour tout entier $n \geqslant 2$

$$C - \frac{1}{12 (n - 1)} < U_n < C$$

5°) On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, . \, dx$$

Démontrer les relations : $I_o = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$,

$$I_0 > I_1 > \cdots > I_n > I_{n+1} > \cdots$$

et

$$I_n = \frac{n-1}{n} \, I_{n-2} \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant 2.$$

En déduire les valeurs de I_{2n} et I_{2n+1}.

6°) Démontrer la relation

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{4n} \, (n!)^4}{\left[(2n)!\right]^2 \, n}$$

et en déduire que :

$$C = -\frac{1}{2} \operatorname{Log} 2\pi$$

Problème II

Soit V un espace vectoriel sur C et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou C.

Une application f de E dans V est dite R- linéaire si, pour tout élément x de E, tout élément y de E et tout nombre réel λ , on a :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda x) = \lambda \, . \, f(x).$$

Si E est un espace vectoriel sur C, f est dite C- linéaire si, pour tout élément x de E, tout élément y de E et tout nombre complexe α, on a :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\alpha x) = \alpha \, . \, f(x).$$

1°) Soient A et B deux espaces vectoriels sur C et f une application R- linéaire de A dans B. Démontrer que f est C- linéaire si et seulement si $f(ix) = i \, f(x)$ pour tout élément x de A.

2°) Dans la suite du problème, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On considère E x E muni de l'addition interne

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \qquad \left[(x,y) \in E \times E, \quad (x',y') \in E \times E\right]$$

et de la loi externe

$$\alpha \, . \, (x,y) = (ax - by, bx + ay) \qquad \left[(x,y) \in E \times E, \alpha \in C \text{ et } \alpha = a + ib\right]$$

Montrer que E x E muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur C qui sera noté E_c.

3°) Soit J l'application de E dans E_c définie par $J(x) = (x,0)$ pour tout élément x de E. Montrer que J est R- linéaire et injective, et que pour tout élément (x,y) de E_c, $(x,y) = J(x) + i \, J(y)$

4°) Montrer que E_c et J possèdent la propriété suivante :

(P): Pour tout espace vectoriel V sur C et toute application R- linéaire f, de E dans V, il existe une application C- linéaire $\bar{f}$ de E_c dans V, et une seule, telle que $f = \bar{f} \circ J$.

5°) Montrer que si E' est un espace vectoriel sur C et φ une application R- linéaire de E dans E' qui possèdent la propriété (P), alors E' est isomorphe à E_c

6°) Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On construit comme ci-dessus E_c et J, et F_c et J_1 respectivement. Soit f une application R - linéaire de E dans F. Montrer qu'il existe une application C - linéaire f_c de E_c dans F_c et une seule, telle que

$$f_c \circ J = J_1 \circ f$$

7°) Si G est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, J_2 et G_c construits comme ci-dessus, g une application R- linéaire de F dans G et g_c l'application C- linéaire de F_c dans G_c correspondante ; montrer que $(g \circ f)_c = g_c \circ f_c$.

8°) Montrer que $(\mathrm{Id}\ E)_c = \mathrm{Id}\ (E_c)$ et que si f est un isomorphisme, alors f_c est un isomorphisme.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail